Grado en Matemáticas – Ejercicios de Análisis Funcional

Relación 3 - Operadores lineales (para clase)

1. Prueba que un funcional lineal sobre un espacio normado es continuo si, y sólo si, su núcleo es cerrado.
   Sugerencia. Si f no está acotado en B_X es fácil probar que $f(B_X) = \mathbb{K}$. De aquí se sigue que la imagen por f de toda bola abierta es $\mathbb{K}$. ¿Qué te dice eso de $\ker(f)$?

2. Prueba que todo funcional lineal no nulo sobre un espacio normado es una aplicación abierta.
   Sugerencia. Cálculo directo para probar que la imagen de cualquier abierto es un abierto. ¡No se supone que el funcional sea continuo!

3. Sea $X = \mathbb{R}^2$ con la norma $\|(x,y)\| = \left(|x|^4 + |y|^4\right)^{1/4}$. Calcula la norma dual en X^* usando multiplicadores de Lagrange.
   Observación. Este ejercicio es para que te convenzas de la utilidad de la desigualdad de Hölder.

4. Sea X un espacio normado y $f \in X^*$, $f \neq 0$. Prueba que para todo $a \in X$ se verifica:
   $$\operatorname{dist}(a, \ker(f)) = \frac{|f(a)|}{\|f\|}$$
   Deduce que si H es el hiperplano $H = \{x \in X : f(x) = \beta\}$ entonces se verifica que
   $$\operatorname{dist}(a, H) = \frac{|f(a) - \beta|}{\|f\|} \tag{1}$$
   Sugerencia. Sea $\alpha = \inf\{\|a-u\| : u \in \ker(f)\}$. Observa que $f(a-u) = f(a)$ lo que implica que $\|a-u\| \geqslant |f(a)|/\|f\|$. Para la desigualdad contraria considera $0 < \rho < 1$ y $\|z\| = 1$ tal que $\rho\|f\| < |f(z)|$. Ten en cuenta que $z = \lambda a - m$ con $m \in M$.
   Observa que la igualdad (1) generaliza la fórmula que da la distancia de un punto a un plano en la geometría euclídea.

5. Sea X un espacio de Banach e Y un espacio normado. Sea $T \in L(X,Y)$ y supongamos que existe $\lambda > 0$ tal que $\|Tx\| \geqslant \lambda\|x\|$ para todo $x \in X$. Prueba que $T(X)$ es un subespacio cerrado de Y.

6. Sea $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\right\}$ y $f : M \to \mathbb{R}$ la forma lineal dada por $f(x,-x) = x$. Calcula la norma de f cuando en M se consideran las normas inducidas por las normas $\| \|_2$, $\| \|_1$ y $\| \|_\infty$ en $\mathbb{R}^2$. En cada caso calcula todas las posibles extensiones de f a $\mathbb{R}^2$ conservando la norma.
   Sugerencia. Todo lo que se necesita es entender las definiciones correspondientes y hacer unos sencillos cálculos.

7. (**Lema clásico de Riesz**) Sea M un subespacio cerrado propio de un espacio normado X y $0 < \alpha < 1$. Prueba que existe $x \in S_X$ tal que $\operatorname{dist}(x, M) > \alpha$. Deduce que $\|\pi\| = 1$ donde π es la aplicación cociente de X sobre X/M.

8. Prueba que para cada $N\in\mathbb{N}$ existe un número $C_N > 0$ tal que para todo polinomio de grado menor o igual que N se verifica que
$$\sum_{k=0}^{N}|p(k)| \leqslant C_N \int_0^N |p(t)|\,\mathrm{d}t$$

9. Sea X un espacio de Banach y M un subespacio cerrado de X. Prueba que X/M es un espacio de Banach.

   Sugerencia. Utiliza la caracterización de la complitud por series.

10. Sean N un subespacio finito dimensional y M un subespacio cerrado de un espacio normado X. Prueba que $M+N$ es cerrado.

    Sugerencia. Usa la aplicación cociente sobre X/M.

11. Sea $T\in L(X,Y)$ y $M=\ker T \neq X$. Sea $\widetilde{T} : X/M \to Y$ el único operador lineal que verifica $T=\widetilde{T}\circ\pi$. Prueba que $\widetilde{T}$ es continuo.

12. Sea $T : X \to Y$ un operador lineal de un espacio normado X en un espacio normado Y de dimensión finita. Prueba que:
    a) T es continuo si, y sólo si, $\ker T$ es cerrado.
    b) T es una aplicación abierta si, y sólo si, es sobreyectiva.

13. En cada uno de los siguientes casos, prueba que T es un operador lineal continuo de $(C[0,1], \|\ \|_\infty)$ en sí mismo y calcula su norma:
$$a)\ [Tf](x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,\quad b)\ [Tf](x)=x^2 f(0),\quad c)\ [Tf](x)=f(x^2)$$

14. Sea $T : C[-1,1] \to \mathbb{R}$ el funcional lineal definido por:
$$Tx=\int_{-1}^{0} x(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t$$

    Prueba que T es continuo y calcula su norma.

15. Sea $T : C[0,1] \to C[0,1]$ definido por $(Tx)(t)=\int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s$ para todo $x\in C[0,1]$. Prueba que $T\in L(C[0,1])$ y es inyectivo. Describe el espacio imagen $Y=T(C[0,1])$ y estudia la continuidad del operador $T^{-1} : Y \to C[0,1]$.

16. Sea X un espacio normado. Se dice que un funcional $f\in X^*$ alcanza su norma si existe $x\in B_X$ tal que $\|f\|=|f(x)|$.
    a) Prueba que si $f\in X^*$ alcanza su norma entonces existe algún $y\in S_X$ tal que $f(y)=\|f\|$.
    b) Sea $f : c_0 \to \mathbb{K}$ definido por $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x(n)}{2^n}$. Prueba que $f\in c_0^*$ y no alcanza su norma.

17. Sea $T : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ dado por $(Tx)(t) = t \int_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s$ para todo $x \in L_2[0,1]$. Prueba que T es un operador lineal continuo y calcula su norma.

18. Sea $\varphi : L_1[-1,1] \to \mathbb{R}$ el funcional lineal dado por $\varphi(x) = \int_{-1}^{1} t x(t)\,\mathrm{d}t$ para todo $x \in L_1[-1,1]$. Prueba que es continuo y calcula su norma.

19. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $T_n, S_n : \ell_2 \to \ell_2$ los operadores definidos por:

$$T_n(x) = \frac{1}{n}x, \quad S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x(k)e_k$$

Estudia la convergencia de las sucesiones $\{T_n\}$, $\{S_n(x)\}$, $\{S_n\}$.

20. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $\varphi_n : C[0,1] \to \mathbb{R}$ por:

$$\varphi_n(x) = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right) x(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in C[0,1])$$

Estudia la convergencia de la sucesión $\{\varphi_n\}$.